第十二章 复变函数的积分

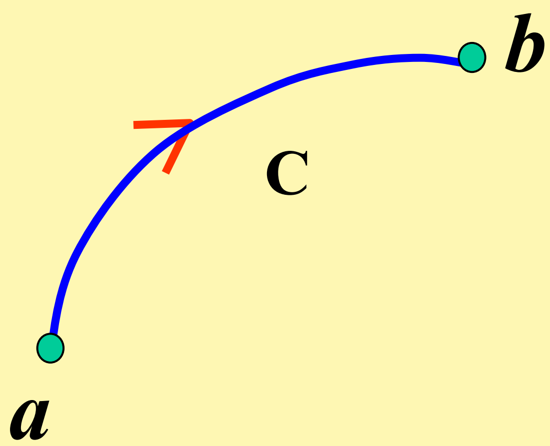
第一节 复函数积分的概念

复积分是研究解析函数的一个重要工具。柯西积分定理及柯西积分公式尤其重要，它们是复变函数论的基本定理和基本公式。

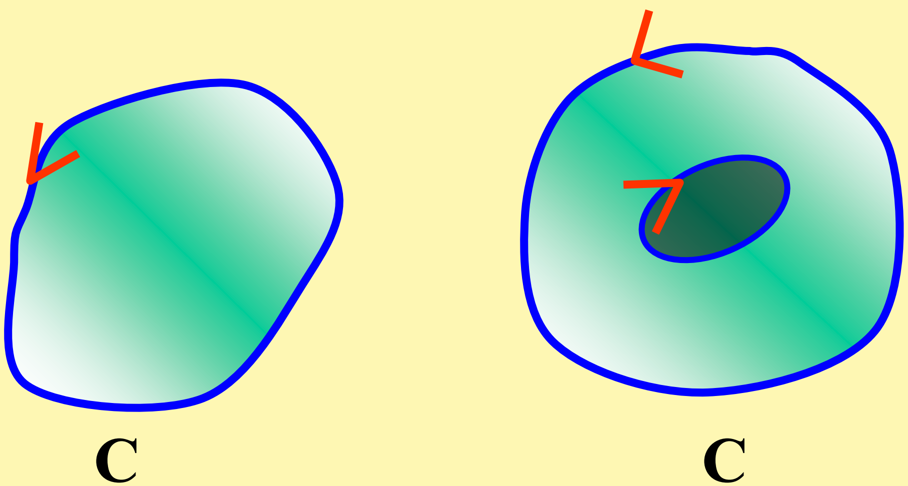
1、复积分的定义

定义1 设 C 是平面上给定的一条光滑(或按段光滑)曲线，如果选定 C 的两个可能方向中的一个作为正方向，那么我们就把 C 理解为有方向的曲线，称为有向曲线。

设曲线 C 的两个端点为 A 与 B ，如果把从 A 到 B 的方向作为 C 的正方向，那么从 B到 A 的方向就是 C 的负方向，并把它记作 C^-。

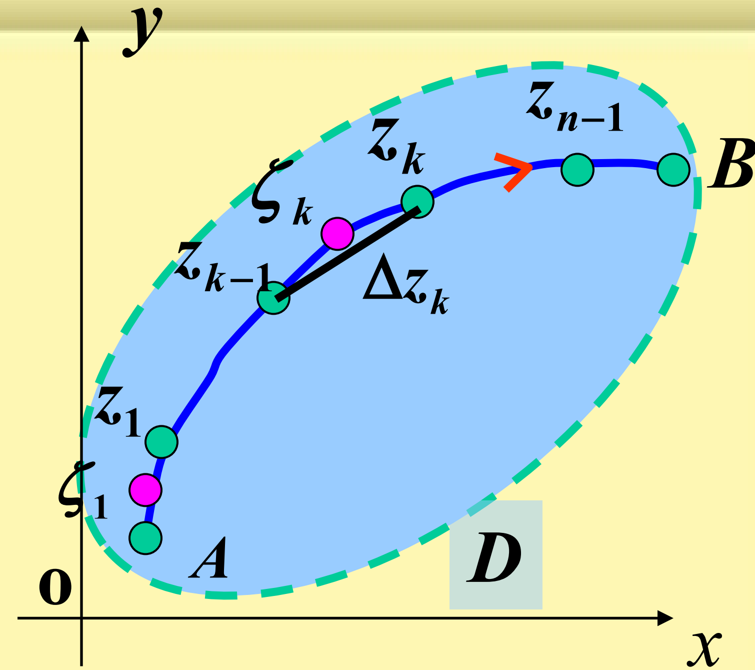


简单闭曲线的正方向；



定义2

设(1) $w = f(z) \quad z \in D$



(2) C为区域D内点$A \to$点B的一条光滑有向曲线.

(3)将$\overset{\frown}{AB}$任意分划成n个小弧段：$A = z_0, z_1, \cdots z_n = B$

(4) $\forall \zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 作乘积$f(\zeta_k)\Delta z_k$

(5)作和式$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$，　$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$，

记Δs_k为$\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度，$\delta=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$

当n无限增加,且δ趋于零时,如果不论对C的分法及ζ_k的取法如何,S_n有唯一极限,那么称这极限值为函数值$f(z)$沿曲线C的积分。

记作　$$\int_C f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$$

说明:

(1)如果曲线C为闭曲线,那么沿此闭曲线的积分记作 $\oint_C f(z)dz$

(2)复积分仍作为一种和式极限来定义的。

这个定义形式上与实函数定积分的定义相同，但实质上是不同的。复积分与二元实函数的第二类曲线积分形式上不同，但反映的实际意义是相同的。

2、复积分存在的条件及计算法

定理 当$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在光滑曲线C上连续时$\Rightarrow \int_C f(z)dz$存在

且 $\boxed{\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy}$

$$\overset{\text{记忆}}{=}\int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$d\vec{s}=\{dx,\ dy\}$ $\quad dz=dx+idy$

这个定理表明$\int_C f(z)dz$可通过两个二元实变函数的曲线积分来进行计算。

复积分计算方法:

1、线积分法 $C: y=\varphi(x)$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

2、参数法 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t: \alpha \to \beta$

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$$

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

3、复积分的基本性质

$$(1)\ \int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

$$(2)\ \int_C [k\, f(z) + l\, g(z)]dz = k\int_C f(z)dz + l\int_C g(z)dz$$

(3) 设C是由以$C_1, C_2, \cdots, C_n$等光滑曲线依次相互连接所组成的的按段光滑曲线,则

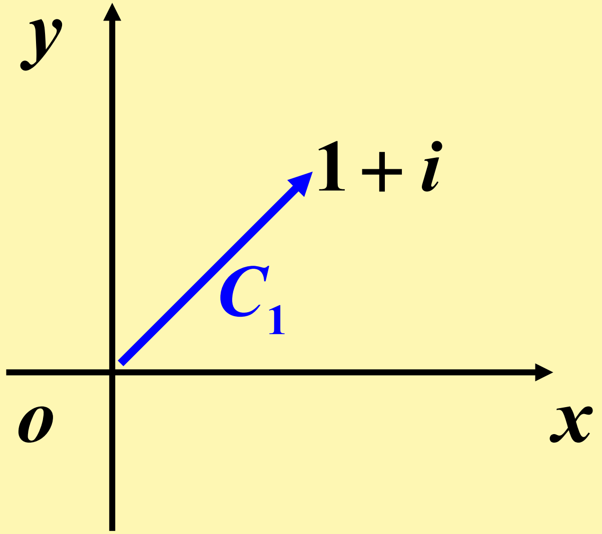
$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$

(复积分对于积分区域的 可加性)

例 1 计算复积分：$\int_C \bar{z}dz$，其中曲线C是

(1) 沿从原点到点$z_0 = 1 + i$的直线C_1

解 (1)曲线C_1的方程：



$$\frac{z-0}{(1+i)-0} = t \quad (0 \le t \le 1)$$

$$z = (1+i)t \quad t: \quad 0 \to 1$$

$$\therefore \int_{C_1} \bar{z}dz = \int_0^1 \overline{(1+i)t}(1+i)dt$$

$$= \int_0^1 (1-i)t(1+i)dt = \int_0^1 2tdt = t^2\Big|_0^1 = 1$$

例 1 计算复积分：$\int_C \bar{z}dz$，其中曲线C是

(1) 沿从原点到点$z_0 = 1 + i$的直线C_1

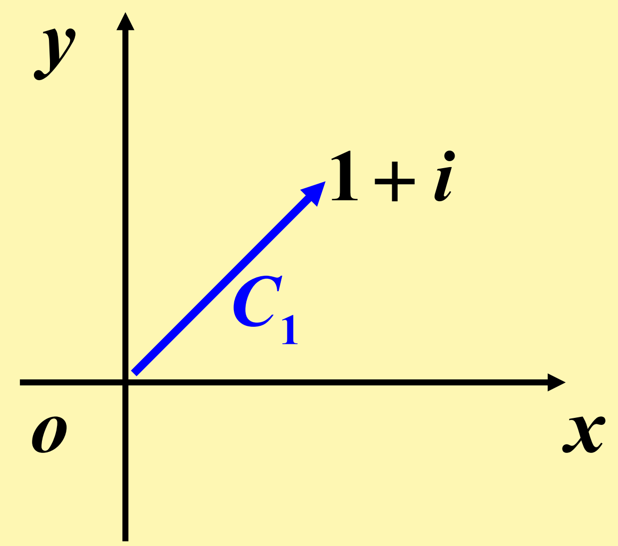
也可以用线积分法计算

曲线C_1可以写成： $y = x \quad (x: 0 \to 1)$

$$\therefore \int_{C_1} \bar{z}dz = \int_{C_1} (x - yi)(dx + idy)$$

$$= \int_{C_1} (xdx + ydy) + i\int_{C_1} (xdy - ydx)$$

$$= \int_0^1 2xdx + i \cdot 0 = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

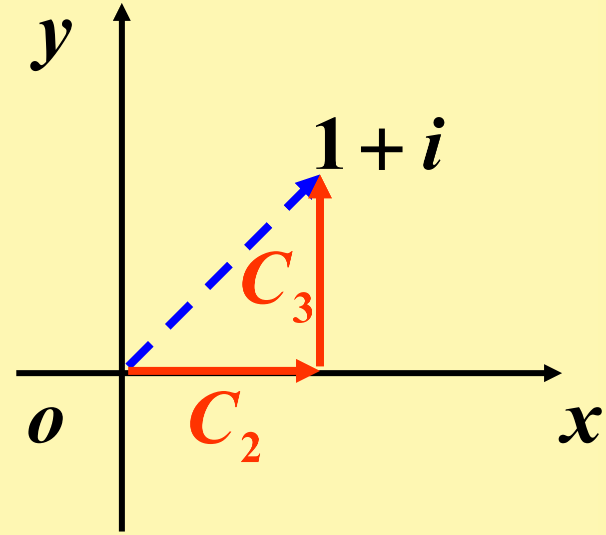


NJUPT

(2) 沿从原点到点$z_1=1$的直线C_2和从点$z_1=1$到$z_0=1+i$的直线C_3所连接而成的折线。

(2) 曲线C_2：$z=t \quad (t:0\to 1)$

曲线C_3：$z=1+it \quad (t:0\to 1)$



$$\therefore \int_C \bar{z}dz=\int_{C_2}\bar{z}dz+\int_{C_3}\bar{z}dz$$

$$=\int_0^1 \bar{t}dt+\int_0^1 \overline{(1+it)}\; idt \;=\int_0^1 tdt+\int_0^1 (1-it)\,idt$$

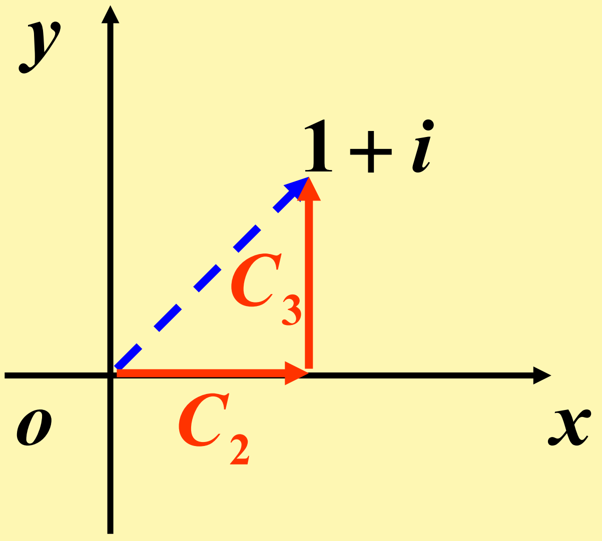
$$=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+i(1-0)+\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \;=1+i$$

例 1 计算复积分:

(1) 沿从原点到点 $z_0 = 1+i$ 的直线 C_1

(2) 沿从原点到点 $z_1=1$ 的直线 C_2 和从点 $z_1=1$ 到 $z_0=1+i$ 的直线 C_3 所连接而成的折线。

此例说明: $\int_C \bar{z}dz$ 沿不同路径积分,虽然起点与终点相同,但路径不同,积分值也不同。



例 2 计算复积分$\int_C z\,dz$,其中曲线C是

(1) C_1:沿一条抛物线$y^2=1-x$从点$(1,0)$到点$(0,1)$

$$C_1: y^2=1-x \Rightarrow \begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow z=(1-t^2)+it\ (t\text{从}\ 0\ \text{到}\ 1),$$

(2) C_2:沿单位圆$x^2+y^2=1$从点$(1,0)$到点$(0,1)$

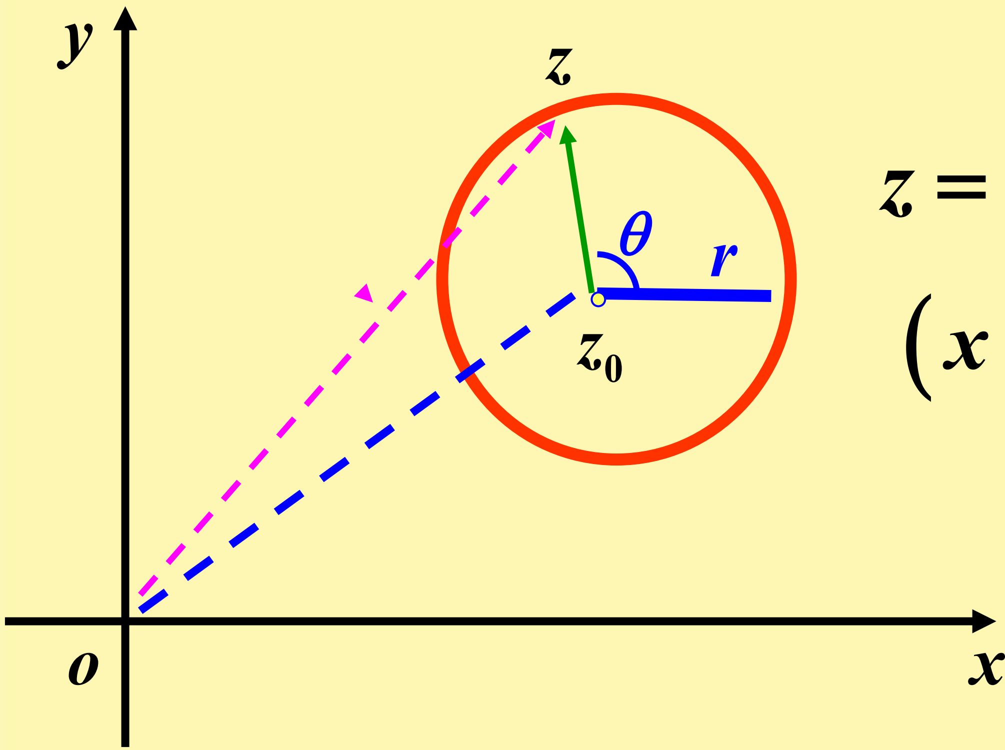
$$x=\cos t,\ \ y=\sin t\quad (t\text{从}\ 0\ \text{到}\ \frac{\pi}{2})\qquad z=\cos t+i\sin t$$

说明:本例中起点、终点相同,路径不同,但复积分$\int_C z\,dz$的值相同。

NJUPT

例 3 计算复积分$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ $(n\in Z)$，其中

曲线C为以z_0为中心,r为半径的正向圆周。



$$z-z_0=re^{i\theta}$$

$$z=x+yi \quad z_0=x_0+y_0 i$$

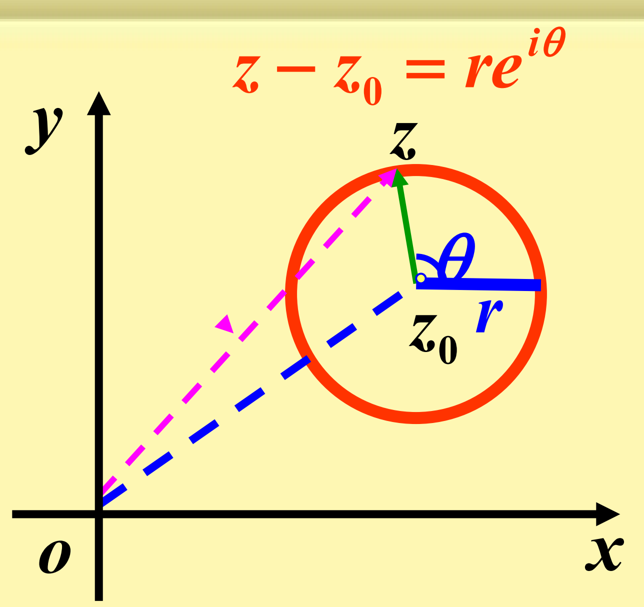
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

$$\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases}$$

$$z=x_0+r\cos\theta+i(y_0+r\sin\theta)=z_0+re^{i\theta}$$

解 曲线$C: |z-z_0| = r$

$\Rightarrow z - z_0 = re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$



$$I = \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\theta})^{n+1}} \cdot re^{i\theta} \cdot i d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^n e^{in\theta}} d\theta = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta$$

(1) 当$n \neq 0, n \in \mathbb{Z}$时,

$$I = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = \frac{i}{r^n(-in)}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d(-in\theta)$$

$$= \frac{1}{-r^n in}\left[e^{-in\theta}\right]_0^{2\pi} = 0$$

(2) 当$n = 0$时, $I = \frac{i}{r^0}\int_0^{2\pi} e^0 d\theta = 2\pi i;$

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz == \begin{cases} 2\pi i & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \, (n \in Z) \end{cases}$$

这个结果以后经常用到, 它的特点是:

积分结果与圆周的中心和半径无关